Chapitre 19

Écoulement d'un fluide

Jusqu'à présent, le programme de mécanique au lycée s'est attaché essentiellement à décrire les mouvements d'un système solide assimilé à un point matériel. Lorsqu'il s'agit d'étudier le mouvement d'un fluide, l'approche est quelque peu différente. Le programme de première a permis d'aborder trois notions relatives à la **statique des fluides** : la **force pressante**, la **loi de Mariotte** et la **loi de la statique des fluides**.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la poussée d'Archimède, puis à l'étude de l'**écoulement d'un fluide** (donc non statique), selon le plan suivant :

- Statique des fluides
- Écoulement permanent d'un fluide incompressible (Vidéo)
    - Exemples d'applications (Formule de Torricelli et Effet Venturi)

19.1 Statique des fluides

19.1.1 Loi de la statique des fluides (Rappel)

Loi statique des fluides

Pour un **fluide statique et incompressible** de masse volumique ρ constante, la relation entre la pression P_1 à une altitude z_1 et la pression P_2 à une altitude z_2 est donnée par :

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta P = -\rho g \Delta z$$

Avec $\Delta P = P_1 - P_2$ et $\Delta z = z_1 - z_2$
P la pression (en Pa)
ρ la masse volumique (en kg.m^{-3})
g l'intensité du champ de pesanteur (en m.s^{-2})
z l'altitude (en m)

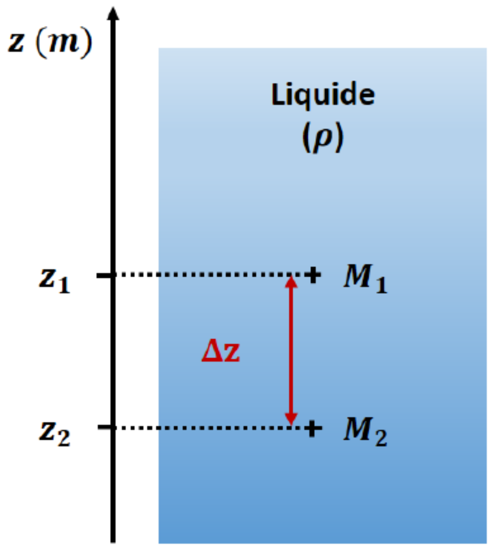


Figure 19.1 – Schéma de la situation présentée dans la loi de la statique des fluides

19.1.2 Poussée d'Archimède

On considère un objet de masse volumique ρ constante, de volume constant V constant, plongé dans un fluide incompressible de masse volumique ρ_f constante. Pour s'intégrer dans le fluide, l'objet doit **déplacer** un volume de fluide équivalent au sien. La **poussée d'Archimède** est une force qui correspond au poids de ce fluide déplacé, mais s'opposant au poids de l'objet. Elle est donc dirigée vers le haut quand le poids est lui dirigé vers le bas.

Poussée d'Archimède

La **poussée d'Archimède**, notée $\vec{\Pi}$, est la force exercée sur un objet de masse volumique ρ et de volume V, plongé dans un fluide de masse volumique ρ_f. Elle correspond au poids du fluide déplacé par l'objet, et elle s'oppose au poids de l'objet.

La norme Π de la poussée d'Archimède et la norme P du poids de l'objet s'écrivent respectivement :

$$\Pi = \rho_f V g \qquad\qquad P = \rho V g$$

Π et P les normes des forces (en N)
V le volume de l'objet (en m^3)
ρ et ρ_f les masses volumiques (en kg.m^{-3})
g l'intensité du champ de pesanteur (en m.s^{-2})

Remarque : L'influence de la poussée d'Archimède par rapport au poids dépend de la différence de masses volumiques entre l'objet et le fluide dans lequel il est plongé :

- Si $\rho \gg \rho_f$, la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids de l'objet (Exemple : Bille de plomb dans un gaz).
- Si $\rho \ll \rho_f$, le poids de l'objet est négligeable devant la poussée d'Archimède (Exemple : Bulle d'air dans de l'eau).

Origine de la poussée d'Archimède :

Afin de comprendre la poussée d'Archimède, il faut faire le bilan des forces pressantes s'exerçant sur l'objet plongé dans le fluide. On considère ici un objet cylindrique de surface S et de hauteur h, donc de volume $V = Sh$.
D'après la loi de la statique des fluides, la pression P du fluide ne dépend que de l'altitude. Ainsi, **pour une altitude z fixée, les forces pressantes latérales $\vec{F_L}$ exercées par le fluide de part et d'autre de l'objet se compensent**. En revanche pour les surfaces axiales (dessus et dessous), la pression n'étant pas la même, les forces pressantes $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ ne se compensent pas. (voir figure 1 .2).

De plus, par définition, les forces pressantes $\vec{F_1}$ à l'altitude z_1 $\vec{F_2}$ à l'altitude z_2 sont données par les relations : $\vec{F_1} = -P_1 S\vec{u}$ et $\vec{F_2} = P_2 S\vec{u}$.
En utilisant la loi de la statique des fluides, on obtient la résultante des forces de pression, appelée poussée d'Archimède, notée $\vec{\Pi}$:

$$\vec{\Pi} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (P_2 - P_1)\, S\vec{u} = \rho_f g\,(z_2 - z_1)\, S\vec{u} = \rho_f g h S\vec{u} = -\rho_f V\vec{g}$$

En considérant la masse de fluide déplacée $m_f = \rho_f V$, on retrouve bien que la poussée d'Archimède correspond au poids du fluide déplacé s'opposant au poids de l'objet.

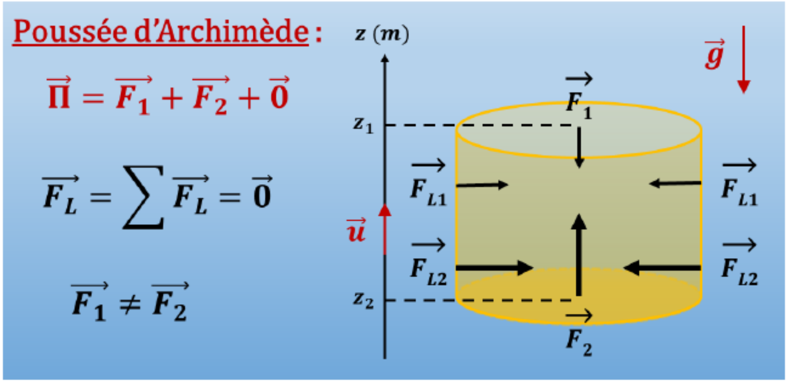


Figure 19.2 – Schéma des forces pressantes exercées par un fluide sur un objet cylindrique

19.2 Écoulement permanent d'un fluide incompressible

19.2.1 Définitions

Définitions

L'écoulement d'un fluide se décrit à travers trois grandeurs pour une particule fluide au point M à l'instant t :

- **Le champ de vitesse** $\vec{v}(M,t)$
- **Le champ de pression** $P(M,t)$
- **La masse volumique** $\rho(M,t)$

L'écoulement d'un fluide est **permanent** si ces trois grandeurs ne dépendent pas du temps t.
Un fluide est **incompressible** si sa masse volumique est uniforme et constante (ρ ne dépend ni de M, ni de t)
Un fluide est **parfait** si sa viscosité est nulle, c'est-à-dire sans frottements entre particules fluides.

19.2.2 Conservation du débit volumique d'un fluide

Débit volumique d'un fluide

Le **débit volumique** D_V d'un fluide en écoulement correspondant à la variation de volume V de ce fluide s'écoulant à travers une surface S en fonction du temps. Il s'agit donc de la dérivée du volume de fluide par rapport au temps :

$$D_V = \frac{dV}{dt}$$

D_V le débit volumique (en $m^3.s^{-1}$)
V le volume de fluide (en m^3)
t le temps (en s)

Conservation du débit volumique

Pour un écoulement permanent et incompressible, le débit volumique de fluide se conserve et reste donc constant. On peut alors montrer qu'il est égal, en toute section de l'écoulement, au produit de la vitesse d'écoulement du fluide v et de la surface S traversée par le fluide :

$$D_V = v \times S$$

D_V le débit volumique (en $m^3.s^{-1}$)
v la vitesse d'écoulement du fluide (en $m.s^{-1}$)
S la surface traversée (en m^2)

19.2.3 Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli

Pour un **écoulement permanent** d'un fluide **parfait** et **incompressible**, dans un champ de pesanteur uniforme, il y a conservation de l'énergie volumique le long d'une ligne de courant. Ainsi, entre deux points M_1 et M_2 situés respectivement aux altitudes z_1 et z_2 de cette ligne de courant, on peut écrire l'égalité suivante :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_f v_1^2 + \rho_f g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_f v_2^2 + \rho_f g z_2$$

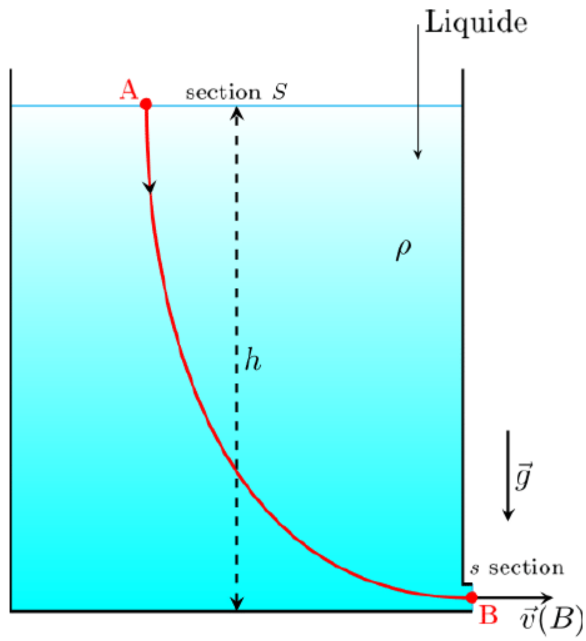
$$P + \frac{1}{2}\rho_f v^2 + \rho_f g z = \text{constante}$$

P la pression du fluide (en Pa)
v la vitesse d'écoulement du fluide (en $m.s^{-1}$)
ρ_f la masse volumique du fluide (en $kg.m^{-3}$)
g l'intensité du champ de pesanteur (en $m.s^{-2}$)
z l'altitude (en m)

La loi de Bernoulli traduit une **conservation énergétique volumique** le long d'une ligne de courant :
- $\frac{1}{2}\rho_f v^2$ représente l'énergie cinétique volumique du fluide
- $\rho_f g z$ représente l'énergie potentielle de pesanteur du fluide
- P représente l'énergie potentielle volumique associée aux forces pressantes

19.3 Exemples d'application

19.3.1 Formule de Torricelli



On considère un réservoir cylindrique de surface S et de hauteur h, rempli d'un liquide de masse volumique ρ. Une vanne cylindrique de section s est disposée en bas du réservoir (voir figure ci-contre), par laquelle le liquide s'écoule.

On effectuera les hypothèses suivantes :

- le réservoir est suffisamment grand de sorte que la surface de la vanne est négligeable devant celle du réservoir, $s \ll S$
- l'écoulement est permanent et incompressible, dans un champ de pesanteur uniforme, et le fluide est supposé parfait.

On souhaite déterminer la vitesse $v = v(B)$ de l'écoulement en sortie de la vanne.

D'après la loi de Bernoulli le long de la ligne de courant entre A et B représentée sur la figure :

$$P(A) + \frac{1}{2}\rho v(A)^2 + \rho g z_A = P(B) + \frac{1}{2}\rho v(B)^2 + \rho g z_B$$

D'après la conservation du débit volumique :

$$D_V(A) = D_V(B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(A) \times S = v(B) \times s$$

Or $s \ll S$ donc $v(A) \ll v(B)$. On peut donc négliger la vitesse d'écoulement dans le réservoir par rapport à celle dans la vanne.
On considère de plus que la pression en A est la même qu'en B, à savoir la pression atmosphérique P_0. Ainsi on obtient :

$$P_0 + 0 + \rho g z_A = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z_B$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g\left(z_A - z_B\right) = \rho g h$$

D'où la vitesse d'écoulement en sortie de la vanne :

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

19.3.2 L'effet Venturi

On considère une conduite cylindrique de section S avec un étranglement de section s au milieu (voir figure 19.3), dans laquelle s'écoule, en régime permanent, un fluide parfait et incompressible, de masse volumique ρ.
Une petite canalisation de section très fine relie la zone de grande section S de la conduite jusqu'à l'étranglement de section s. Un fluide de masse volumique ρ' est supposé statique dans cette canalisation.

On constate une **dépression** au niveau de l'étranglement lors de l'écoulement du fluide dans la conduite. Cette dépression est observée à l'aide du fluide témoin dans la petite canalisation : en

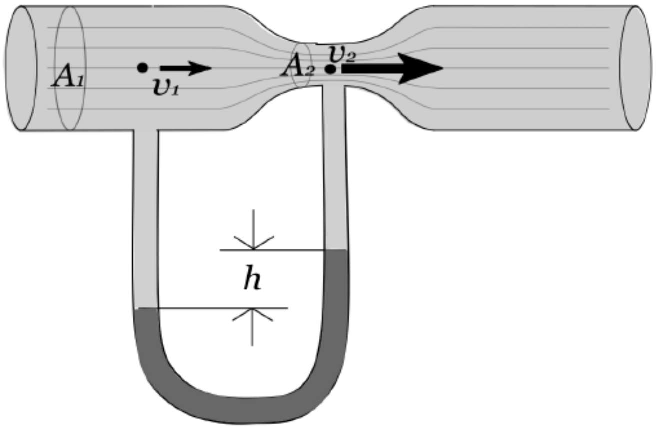


Figure 19.3 – Schéma de la situation de l'effet Venturi (Source : Gringotumadre on wikimedia.org)

effet, on s'aperçoit que l'altitude de séparation entre les deux fluides n'est pas la même au niveau de la section S qu'au niveau de la section s. Ce phénomène est appelé l'**effet Venturi**.

D'après la loi de la statique des fluides pour le fluide de masse volumique ρ' :

$$P_1 + \rho' g z_1 = P_2 + \rho' g z_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho' g \left(z_2 - z_1\right) = \rho' g h$$

Ainsi on en déduit que la pression au niveau de l'étranglement est plus faible que celle au niveau de la section large.

Considérons une ligne de courant horizontale reliant les points A_1 et A_2 sur la figure 19.3. D'après la loi de Bernoulli :

$$P_{A_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z = P_{A_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z$$

L'altitude étant la même pour les deux points, le terme $\rho g z$ se simplifie.
De plus, d'après la conservation du débit volumique :

$$S v_1 = s v_2$$

Donc $v_2 = \frac{S}{s} v_1 \leq v_1$. Ainsi :

$$P_{A_2} = P_{A_1} + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right) \leq P_{A_1}$$